به نام خدا

تدریس احتمال

متن حاضر در محل خانه ی ریاضیات اصفهان توسط اینجانب به صورت سخنرانی ارائه شد وبنا به درخواست حاضرین و نیز سرگروه ریاضی استان،به رشته ی تحریر در آمده است.لازم به یادآوری است که مخاطب این متن دانش آموز می باشد و مثال ها براین اساس تهیه و تنظیم شده است.

محمد شیرچیان-دبیر بازنشسته ی ناحیه ۲ اصفهان

شناسنامه طنز احتمال

نام : حساب احتمالات

نام پدر: آنالیز ترکیبی

نام مادر: جبر مجموعه ها(شمول و عدم شمول)

لقب: فراوانی نسبی

بر این اساس اگر بخواهیم احتمالات به صورت موفق تدریس شود،بد نیست که در ابتدا مختصری از آنالیز ترکیبی و جبر مجموعه ها به مدت ۲ ساعت کامل برای دانش آموز گفته شود.در متن زیر طریقه ی تدریس بیان می شود.

تدریس آنالیز ترکیبی

مفهوم این قسمت«چگونه بدون شمردن بشماریم»می باشد.مسائل آنالیز ترکیبی بر سه دسته تقسیم می شوند:جابجایی،انتخاب و جابجایی و انتخاب با هم، که این سه دسته توسط اصل شمارش پشتیبانی خواهند شد.

اصل شمارش: اگر چند آزمایش با هم اجرا شوند،تعداد کل نتایج برابر است با حاصل ضرب نتیجه ی تک تک آزمایشات.

مثال: یک سکه به ۲ نتیجه و دو سکه به ۴=۲×۲ نتیجه و سه سکه به ۸=۲×۲×۲ نتیجه منجر خواهد شد.همچنین یک تاس به ۶ نتیجه و دو تاس به ۳۶=۶×۶ نتیجه و یک سکه ویک تاس به ۱۲=۲×۶ نتیجه منجر می شود.

پس از زدن چند مثال از این قبیل و پرسش از دانش آموزان به معرفی اولین مسئله ی آنالیز ترکیبی می پردازیم.

مسئله ی مهم جابجایی یا جایگشت یا تبدیل: بطورکلی n شی با شانس مساوی و بدون تکرار به $n!$ طریق می توانند جای خود را با هم عوض کنند.برای مثال ۳ نفر به نام‌های a ، b و c به $3! = 6$ طریق می‌توانند در یک ردیف جای خود را با هم عوض کنند.زیرا

$$a, b, c \Rightarrow \boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} \xRightarrow{\text{اصل شمارش}} 3 \times 2 \times 1 = 6$$

به طور کلی ملاحظه می‌شود طبق اصل شمارش یک حاصل‌ضرب از نتایج هر خانه به دست می‌آید.زمانی این حاصل ضرب منطبق بر تعریف فاکتوریل است که اولا شانس‌ها برابر و ثانیا تکرار مجاز نباشد.اگر شانس‌ها برابر نباشد و یا عناصر تکراری باشند،طبق اصل شمارش یک حاصل‌ضرب از نتایج به دست می‌آید ولی این حاصل ضرب به فرم فاکتوریل نخواهد بود.

مثال: با ارقام ۰ ، ۱ و۲ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

$$0, 1, 2 \Rightarrow \boxed{2}\boxed{2}\boxed{1} \xRightarrow{\text{اصل شمارش}} 2 \times 2 \times 1 = 4$$

در این مسئله شانس عدد صفر با بقیه یکی نیست،زیرا نمی‌تواند در محل صدگان قرار گیرد.

حال اشاره‌ای به مسائل تفکیکی خواهیم داشت.

مثال: با ارقام ۱،۳،۴،۵ و۷ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۴۲۸ می‌توان نوشت به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد.

$$1, 3, 4, 5, 7 \Rightarrow \begin{cases} \text{صدگان} = 4 \Rightarrow \boxed{1}\boxed{3}\boxed{3} > 428 \xRightarrow{\text{اصل شمارش}} 9 \\ \text{صدگان} \neq 4 \Rightarrow \boxed{2}\boxed{4}\boxed{3} > 428 \xRightarrow{\text{اصل شمارش}} 24 \end{cases} \Rightarrow 9 + 24 = 33$$

مسائلی که بیان شد،جابجایی‌های ساده بود.لازم است به مسائلی از جابجایی‌های مرکب نیز اشاره شود.

مثال: سه گوی شماره‌دار قرمز و چهار گوی شماره‌دار سفید در اختیار داریم،به چند طریق می‌توان این گوی ها را در یک ردیف کنار هم چید به طوری که:

الف)هیچ شرطی نباشد.

ب)گوی‌های سفید کنار هم و گوی‌های قرمز نیز کنار هم باشند.

ج)گوی سفید شماره‌ی ۱ همواره کنار گوی قرمز شماره‌ی ۱ باشد.

د)گوی سفید شماره‌ی ۱ بلافاصله بعد از گوی قرمز شماره‌ی ۱ باشد.

ه)گوی‌ها یک در میان سفید وقرمز باشند.

و)گوی‌ها یک در میان سفید و قرمز نباشند.

الف) $(3+4)! = 7!$

ب) $\boxed{WWWW}\,\boxed{RRR} \to 4! \times 3! \times 2!$

ج) $\boxed{W_1R_1}\, WWWRR \to 2! \times 6!$

د) $\boxed{R_1W_1}\, WWWRR \to 6!$

ه) $WRWRWRW \to 4! \times 3!$ (شروع با قرمز امکان پذیر نیست.)

و) $7! - (4! \times 3!)$

همکاران محترم هر قسمت این مسئله را به طور مفصل بازگو کنند مخصوصا تأکید بر قسمت «و» مبنی بر این که اگر محاسبه ی یک پیشامد مشکل باشد،عدم وقوع آن پیشامد را از کل حالات کم می‌کنیم.

در این‌جا بحث جابجایی‌های ساده و مرکب به پایان رسیده است و نکات زیر را یادآوری می کنیم:

نکته‌ی ۱: در جابجاییn شی اگر a شی مثل هم وb شی مثل هم و...وسرانجامk شی دیگر مثل هم باشند،تعداد کل تبدیلات برابر است با$\frac{n!}{a!b!...k!}$

مثال: با استفاده از حروف کلمه ی «احتمالات» چند کلمه‌ی ۸ حرفی بدون توجه به معنا می‌توان نوشت؟

$$\{ا - ح - ت - م - ا - ل - ا - ت\} \Longrightarrow \frac{8!}{2!\,3!}$$

نکته‌ی۲: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با2^n و تعداد زیر مجموعه‌هایk عضوی از آن برابر است با$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

نکته‌ی ۳(تبدیل دوری): n شی یا n نفر به $(n-1)!$ طریق می‌توانند دور یک میز نسبت به هم قرار گیرند ولی نسبت به صندلی‌ها همان $n!$ طریق است.

نکته‌ی۴(تبدیل گردن‌بندی): با n جواهر مختلف می‌توان $\frac{(n-1)!}{2}$ گردن بند متفاوت ساخت.

نکته‌ی۵: تعداد مضارب عددk در مجموعه‌ی $T=\{1,2,3,\dots,n\}$ برابر $\left[\frac{n}{k}\right]$و در مجموعه ی $T=\{n,n+1,n+2,\dots,m\}$ برابر است با$\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]$ و همچنین تعداد مضاربp رقمی عدد k برابر است با$\left[\frac{9\times10^{p-1}}{k}\right]$.

البته همکاران محترم در هر قسمت می‌توانند مثالی را مطرح کنند.اثبات موارد فوق لازم نیست مگر این که به درخواست دانش‌آموز باشد.

در این‌جا به تشریح دومین قسمت از مسائل آنالیز ترکیبی یعنی انتخابات می‌پردازیم.

- به طور کلی تعداد انتخاب k شی ازبین n شی مختلف برابر است با$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}=C(n,k)$

مثال: به چند طریق می توان دو نماینده از بین سه کاندیدای a،b و c انتخاب نمود؟

$$a,b,c \xrightarrow{\text{دو نماینده انتخاب}} \begin{cases} a,b \\ a,c \\ b,c \end{cases} \quad \text{یا} \quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

انتخاب فوق یک انتخاب ساده است و همان طوری که جابجایی مرکب داشتیم،انتخاب مرکب نیز داریم.

مثال: اگر در یک میوه فروشی فقط دو هندوانه از بین n هندوانه انتخاب کنیم،انتخاب ساده است واگر فرضا دو هندوانه و سه خربزه و هفت عدد گرمک انتخاب کنیم،انتخاب ما مرکب خواهد بود و نتایج آن ها طبق اصل شمارش در هم ضرب می شود.

مثال: به چند طریق می توان از بین ۲ استاد و ۵ دانشجو و۳ کارمند دانشگاه،شورای ۵نفره با شرایط زیر تشکیل می دهیم:

الف) هیچ شرط دیگری نباشد.

ب) شورا شامل یک استاد باشد.

ج) شورا شامل لااقل یک استاد باشد.

د) شورا شامل حداکثر یک استاد باشد.

ه) شورا شامل استاد نباشد.

و) شورا شامل یک استاد ، دو دانشجو و دو کارمند باشد.

قبل از شروع به حل مسئله این نکته را یاداوری می کنیم که یک پیشامد را می توانیم با به کار بردن الفاظ منطقی«یا» و «و» تجزیه کنیم. «یا» معادل جمع یا اجتماع و «و» معادل ضرب یا اشتراک خواهد بود.

الف) $\binom{2+5+3}{5}$ ب) $\binom{2}{1}\binom{5+3}{4}$ ج) $\binom{2}{1}\binom{5+3}{4}+\binom{2}{2}\binom{5+3}{3}$

د) $\binom{2}{1}\binom{5+3}{4}+\binom{2}{0}\binom{5+3}{5}$ ه) $\binom{5+3}{5}$ و) $\binom{2}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{2}$

قابل توجه همکاران محترم: لفظ منطقی «و» معادل اشتراک یا ضرب می باشد که در دو حالت زیر مورد استفاده قرار گیرد.

$$\begin{cases} P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B) = P(A)P(B|A) \\ P(B|A) = P(B) \Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B) \end{cases}$$

در حقیقت دو پیشامدA و B مستقلند هر گاه وقوع یکی هیچ تأثیری در وقوع دیگری نداشته باشد.یعنی$P(B|A) = P(B)$ که با طرفین،وسطین به نتیجه ی بالا می رسیم،که در این مرحله نباید برای دانش آموز گفته شود و در جای خودش مطرح خواهد شد.

در این مرحله ذکر نکات زیر ضروری است:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad , \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n$$

حالا به تشریح سومین دسته از مسائل آنالیز ترکیبی یعنی انتخاب و جابجایی با هم می پردازیم.

باید به دانش آموزان توصیه کنیم که در این گونه مسائل انتخاب را جدا انجام دهند و جابجایی را نیز جدا،آن گاه نتایج را طبق اصل شمارش در هم ضرب خواهند شد.یعنی:

$$\binom{n}{r} \times r! = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r) = (n)_r$$

به دانش آموزان باید آموخت که فرمول بالا همه ی مسائل ترتیب را نمی تواند حل کند زیرا در فرمول بالا انتخاب از نوع ساده است،در صورتی که در بعضی مسائل انتخاب مرکب است و فرمول بالا جواب نمی دهد بنابراین توصیه ی اکید این است که انتخاب جدا،جابجایی جدا.

مثال: با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی به چند طریق می توان کلمات ۵ حرفی مرکب از ۲حرف صدادار متمایز و ۳حرف بی صدای متمایز با شرایط زیر تشکیل داد؟

الف) هیچ شرط دیگری نباشد.
ب) کلیه ی کلمات با a شروع و با b خاتمه یابند.
ج) کلیه ی کلمات با a شروع و شامل b باشند.
د) کلیه ی کلمات شامل a و فاقد b باشند.
در این مسئله حروف صدادار را جدا و حروف بی صدا را هم جدا انتخاب می کنیم،آن گاه جابجایی را در مرحله ی بعد انجام می دهیم و در انتها نتایج را طبق اصل شمارش در هم ضرب می کنیم.در این مسئله انتخاب از نوع مرکب است.
الف) $\binom{5}{2}\binom{21}{3} \times 5!$
ب) $\binom{1}{1}\binom{4}{1} \times \binom{1}{1}\binom{20}{2} \times 3!$
ج) $\binom{1}{1}\binom{4}{1} \times \binom{1}{1}\binom{20}{2} \times 4!$
د) $\binom{1}{1}\binom{4}{1} \times \binom{20}{3} \times 5!$
در این جا معرفی آنالیز ترکیبی به عنوان پدر احتمال در همین سطح به پایان می رسد.
اکنون به معرفی جبرمجموعه ها خصوصا شمول وعدم شمول به عنوان مادر احتمال می پردازیم.روابط این قسمت را با نمودار ون به دانش آموزان تفهیم می کنیم.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A') = n(S) - n(A)$$

مثال های زیر به نحو بسیار مؤثری می توانند برای دانش آموز مفید باشند.
مثال: چند عضو مجموعه ی $T = \{n \in \mathbb{N} | 1 \le n \le 120\}$ مضرب ۳ می باشند یا مضرب ۵ ؟
فرض کنید A مجموعه ی مضرب های ۳و B مجموعه ی مضرب های ۵ باشد،در این صورت

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{120}{3}\right] + \left[\frac{120}{5}\right] - \left[\frac{120}{15}\right]$$

مثال: در مسئله ی بالا چند عضو نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ می باشند؟

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(S) - n(A \cup B) = 120 - \left(\left[\frac{120}{3}\right] + \left[\frac{120}{5}\right] - \left[\frac{120}{15}\right]\right)$$

مثال: چند عضو مجموعه ی قبل مضرب ۳ یا مضرب ۵ بوده ولی مضرب ۷ نیست؟
فرض کنید C مجموعه ی مضرب های ۷ باشد،در این صورت

$$\begin{aligned} n((A \cup B) \cap C') &= n[(A \cup B) - C] = n(A \cup B) - n[(A \cup B) \cap C] = n(A \cup B) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &= \left[\frac{120}{3}\right] + \left[\frac{120}{5}\right] - \left[\frac{120}{15}\right] - \left[\frac{120}{21}\right] - \left[\frac{120}{35}\right] + \left[\frac{120}{105}\right] \end{aligned}$$

جالب این جاست که بعضی از مسائل هم به کمک آنالیزترکیبی و هم به کمک جبر مجموعه ها حل می شوند،مانند مثال زیر
مثال: دو مهره ی شماره دار قرمز و دو مهره ی شماره دار سفید و پنج مهره ی شماره دار آبی را به چند طریق می توان در یک ردیف کنارهم چید به قسمی که قرمزها کنار هم باشند ولی سفیدها کنار هم هم نباشند؟
فرض کنید A پیشامد مهره های قرمز کنارهم و B پیشامد مهره های سفید کنارهم باشد،در این صورت

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 2! \times 8! - 2! \times 2! \times 7!$$

زیرا داریم

$$\boxed{RR}WWBBBBB \to n(A) = 2! \times 8!$$

$$\boxed{RR}\,\boxed{WW}BBBBB \rightarrow n(A \cap B) = 2! \times 2! \times 7!$$

در این جا دانش آموز آمادگی لازم را برای درک مسائل احتمال پیداکرده استو به راحتی می توان وارد این بحث شد.همان طـور کـه این جانب تمامی این مطالب را در یک جلسه در خانه ریاضیات بیان کردم.

حال به معرفی احتمال می پردازیم و این بحث از معرفی فضای نمونه و پیشامد شروع می کنیم.

فضای نمونه: **مجموعه نتایج حاصل از انجام یک یا چند آزمایش با هم را فضای نمونه ای آن آزمایش یا آزمایشات می نامند.**

پیشامد یا حادثه: **هر زیر مجموعه از فضای نمونه را پیشامد یا حادثه می گویند. $\emptyset$را پیشامد غیر ممکن و S را پیشامد حتمی یا یقین می گویند.**

نکته: **اگرA وB دو پیشامد از فضای نمونه یS باشند آن گاه A وB ناسازگارند اگر وتنها اگـر $A \cap B = \emptyset$ و A وB سـازگارند اگـر وتنها اگر$A \cap B \neq \emptyset$.**

- **محاسبه ی احتمال وقوع یک حادثه در فضای هم شانس:**

طبق تعریف داریم $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(B)} \Leftrightarrow \dfrac{\text{تعداد حالاتیکه } A \text{ رخ می دهد}}{\text{کل تعداد حالات ممکن}}$= احتمال وقوع پیشامد$A$

نکته: **اگر آن گاه** $A \subseteq S \;\Rightarrow\; 0 \le P(A) \le 1$

در این جا برای دانش آموز بیان خواهیم کرد که در فضای گسسته هم شانس هر احتمال، خارج قسمت دو مسئله آنالیز ترکیبی است که در قبل معرفی شد.بعضی از مسائل احتمال در حمایت پدر احتمال یعنی آنالیز ترکیبـی و بعضـی در حمایـت مـادر احتمـال یعنـی جبرمجموعه ها و برخی دیگر که مورد نظر ما نیستند هم به کمک آنالیز ترکیبی وهم به کمک جبر مجموعه ها حل می شوند.

ابتدا به بیان مسائلی می پردازیم که تحت حمایت آنالیز ترکیبی حل می شوند یعنی مسـائل جابجـایی و مسـائل انتخـاب و مسـائل جابجایی و انتخاب با هم.

مثال: **۵ مهره ی سفید متفاوت و ۳ مهره ی قرمز متفاوت را به تصادف کنار هم قـرار مـی دهیم.احتمـال ان کـه قرمزهـا کنـار هـم باشند،چقدر است؟**

$$n(S) = (5+3)! = 8!$$

$$\boxed{RRR}WWWWW \rightarrow n(A) = 3! \times 6! \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 6!}{8!}$$

مثال: **با حروف کلمه ی خوارزمی یک کلمه ی چهار حرفی بدون تکرار حروف ساخته ایم.احتمال آن را حساب کنید که این کلمه بـی نقطه باشد.**

$$n(S) = \boxed{7}\,\boxed{6}\,\boxed{5}\,\boxed{4} = 840$$

برای محاسبه با توجه به این که اگر حرف «ی» در ابتدا یا وسط کلمه باشد نقطه دار محسوب می شود ولی اگر انتهـای کلمـه باشـد بدون نقطه خواهد بود،داریم:

$$\begin{cases} \text{کلمه مختوم به ی}\ \boxed{1}\,\boxed{4}\,\boxed{3}\,\boxed{2} = 24 \\ \text{کلمه غیرمختوم به ی}\ \boxed{4}\,\boxed{3}\,\boxed{2}\,\boxed{1} = 24 \end{cases} \Rightarrow\; n)A) = 48 \;\Rightarrow\; P(A) = \frac{48}{840}$$

البته در مسئله ی فوق اگر هر یک از حروف روی یک کارت نوشته شده باشد و با جابجایی کارت هـا بخـواهیم کلمـه بسـازیم «ی» همیشه بدون نقطه خواهد بود که از نظر ادبی چالش برانگیز است.

مثال: در کیسه ای ۲ مهره قرمز ، ۳مهره سفید و ۵ مهره آبی موجود است.

الف) هرگاه از این کیسه مهره ای به تصادف انتخاب شود،احتمال قرمز بودن چقدر است؟

ب) هرگاه از این کیسه دو مهره به تصادف انتخاب شود،احتمال همرنگ بودن چقدر است؟

ج) هرگاه از این کیسه سه مهره به تصادف انتخاب شود،احتمال آن را حساب کنید که لااقل یک مهره قرمز انتخاب شده باشد.

الف) $\dfrac{\binom{2}{1}}{\binom{10}{1}} = \dfrac{2}{10}$ ب) $\dfrac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$ ج) $\dfrac{\binom{2}{1}\binom{3+5}{2}+\binom{2}{2}\binom{3+5}{1}}{\binom{10}{3}}$

مثال: با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی یک کلمه ی ۵ حرفی به تصادف بدون توجه به معنا و بدون تکرارحروف ساخته ایم.احتمال آن را حساب کنید که این کلمه با یک حرف صدادار شروع و با یک حرف صدادار خاتمه یابد و بقیه ی حروف بی صدا باشند.

$$n(S)=\binom{26}{5}\times 5! \quad , \quad n(A)=\binom{5}{2}\binom{21}{3}\times 2!\times 3! \quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{\binom{5}{2}\binom{21}{3}\times 2!\times 3!}{\binom{26}{5}\times 5!}=0/0202$$

البته مسئله ی فوق را به روش استدلالی نیز می توان حل کرد ولی هدف این است که دانش آموز ارتباط بین مطالب قبل و حال را درک کنند.

$$\begin{cases} n(S)= \boxed{26}\boxed{25}\boxed{24}\boxed{23}\boxed{22} \\ n(A)= \boxed{5}\boxed{21}\boxed{20}\boxed{19}\boxed{4} \end{cases} \Rightarrow P(A)=\frac{5\times 21\times 20\times 19\times 4}{26\times 25\times 24\times 23\times 22}=0/0202$$

قبل از ورود به مسائلی که از طریق جبرمجموعه ها حل می شوندبرای دانش آموزان بیان می کنیم که اگر تمام فرمول های شمول و عدم شمول را بر $n(S)$تقسیم کنیم فرمول های احتمال به شرح زیر به دست می آیند:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$P(A')=1-P(A)$$

مثال: عددی به تصادف از مجموعه ی$T=\{n\in\mathbb{N} | 1\le n\le 420\}$ انتخاب کرده ایم ،احتمال آن که این عدد مضرب ۳ بوده ولی مضرب ۵ نباشد،کدام است؟

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{\left[\frac{420}{3}\right]}{420}-\frac{\left[\frac{420}{15}\right]}{420}$$

پس از مثال هایی از این قبیل به ذکر مسئله ای می پردازیم که هم به کمک آنالیز ترکیبی و هم به کمک جبر مجموعه ها حل می شوند که در کتاب های درسی به آن ها اشاره ای نشده است.

مثال: دو مهره ی قرمز متفاوت ،دو مهره ی سفید متفاوت و پنج مهره ی آبی متفاوت را به تصادف در یک ردیف چیده ایم.احتمال آن که قرمزها کنار هم بوده ولی سفیدها کنار هم نباشند،چقدر است؟

فرض کنید A پیشامد مهره های قرمز کنار هم و B پیشامد مهره های سفید کنار هم باشد،در این صورت

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{2!\times 8!}{9!}-\frac{2!\times 2!\times 7!}{9!}$$

زیرا داریم:

$$\boxed{RR}WWBBBBB\to n(A)=2!\times 8!$$

$$\boxed{RR}\,\boxed{WW}BBBBB\to n(A\cap B)=2!\times 2!\times 7!$$

$$n(S)=(2+2+5)!=9!$$

در پایان تذکر می دهیم که تمامی موارد فوق در فضای غیر هم شانس و نیز در فضای پیوسته نیز قابل تعمیم است.

تایپ: گروه ریاضی استان اصفهان -بهمن ۱۳۸۹