.۱۶

$$-۱۰۰ < x^۲ - ۱ < ۱۰۰ \implies -۹۹ < x^۲ < ۱۰۱$$

$$\implies x = ۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \pm۴, \pm۵, \pm۶, \pm۷, \pm۸, \pm۹, \pm۱۰$$

پس جواب ۲۱ است و گزینه‌ی ۲ صحیح است.

.۱۷ همواره $(A-B)\cap(B-A)=\emptyset$ پس $A=\emptyset$ و در نتیجه همه‌ی گزینه‌ها به جز گزینه‌ی ۳ صحیح است، پس جواب گزینه‌ی ۳ است.

.۱۸

$$A-(A-B)=A\cap(A-B)'=A\cap(A'\cup B)=\emptyset\cup(A\cap B)=A\cap B)$$

$$B\cap(A\cap B)'=B\cap(A'\cup B')=(B\cap A')\cup(B\cap B')=B\cap A'$$

بنابر این جواب برابر است با

$$(A\cap B)\cup(A'\cap B)=B$$

پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

.۱۹ A را مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۵ و B را مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۷ در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی مورد نظر، $A\cup B-A\cap B$ است.

$$|A\cup B-A\cap B|=|A\cup B|-|A\cap B|=|A|+|B|-۲|A\cap B|$$

از طرفی داریم

$$|A|=[\frac{۱۰۰۰}{۵}]=۲۰۰,\qquad |B|=[\frac{۱۰۰۰}{۷}]=۱۴۲,\qquad |A\cap B|=[\frac{۱۰۰۰}{۳۵}]=۲۸$$

پس جواب برابر است با $۱۸۶ = ۲۸ \times ۲ - ۱۴۲ + ۲۰۰$ که در گزینه‌ها نیست.

.۲۰ مجموعه‌ی اعضای کلاس‌ها را به ترتیب A و B و C می‌نامیم. داریم

$$|A\cap B\cap C|=۲۵-|A'\cup B'\cup C'|\geq ۲۵-|A'|-|B'|-|C'|=۲۵-۷-۵-۳=۱۰$$

پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۲۱. موارد (پ) و (ت) صحیح هستند پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۲۲. داریم

$$a_n = S_n - S_{n-۱} = ۳n^۳ - n - (۳(n-۱)^۳ - (n-۱)) = ۹n^۲ - ۹n + ۲$$

پس $a_۴ = ۱۱۰$ و $a_۶ = ۲۷۲$ در نتیجه جواب ۳۸۲ است و گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۲۳. داریم

$$u_۱ = a + b + c = -۹$$

$$u_۳ = ۹a + ۳b + c = -۱$$

$$u_۵ = ۲۵a + ۵b + c = ۱۵$$

از حل این معادلات به دست می‌آید $a = ۱$ و $b = ۰$ و $c = -۱۰$. در نتیجه $u_۷ = ۴۹ - ۱۰ = ۳۹$ پس جواب صحیح ۳۹ است که در گزینه‌ها نیست.

۲۴. برای n زوج،

$$S_n = (۱^۲ - ۲^۲) + (۳^۲ - ۴^۲) + \cdots + ((n-۱)^۲ - n^۲)$$

$$= (۱ - ۲ \times ۲) + (۱ - ۲ \times ۴) + (۱ - ۲ \times ۶) + \cdots + (۱ - ۲ \times n)$$

$$= \frac{n}{۲} - ۴ \times (۱ + \cdots + \frac{n}{۲}) = \frac{n}{۲} - n(\frac{n}{۲} + ۱) = -\frac{n(n+۱)}{۲}$$

و برای n فرد،

$$S_n = S_{n-۱} + n^۲ = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

پس جواب برابر است با

$$S_{۱۳۹۵} + S_{۱۳۹۶} = \frac{۱۳۹۵ \times ۱۳۹۶}{۲} - \frac{۱۳۹۶ \times ۱۳۹۷}{۲} = -۱۳۹۶$$

که در گزینه‌ها نیست.

۲۵. فرض کنید ارتفاع‌های مثلث، a، aq و $aq^۲$ باشند که $q > ۱$. اگر مساحت مثلث را S بنامیم، اضلاع مثلث برابرند با $\frac{۲S}{a}$، $\frac{۲S}{aq}$ و $\frac{۲S}{aq^۲}$. پس بنابر نامساوی مثلث،

$$\frac{۲S}{a} < \frac{۲S}{aq} + \frac{۲S}{aq^۲}$$

$$\implies ۱ < \frac{۱}{q} + \frac{۱}{q^۲}$$
$$\implies q^۲ < q + ۱$$

پس q باید بین ریشه‌های سهمی $x^۲ - x - ۱$ باشد. یعنی

$$\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} < \frac{۱}{q} < \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} = ۱/۶۱...$$

پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۲۶. جواب صحیح بازه‌ی $[\frac{۲}{۳^۷} + \frac{۱}{۳^۶} + \cdots + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳^۷} + \cdots + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۳}]$ است که در گزینه‌ها نیست.

۲۷. داریم

$$b_n = ۳ + ۶ + ۱۲ + ۲۴ + \cdots + ۳ \times ۲^{n-۲} = ۳ \times (۱ + ۲ + ۴ + \cdots + ۲^{n-۲}) = ۳ \times (۲^{n-۱} - ۱)$$

پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۲۸. کلمه‌ی مساوی در صورت سوال اضافی است.

$$۱۰۰ = x + y + z, \quad ۰ < x < y < z$$

$$y = \sqrt{xz} \implies y^۲ = xz$$
$$z = x + y \implies y^۲ = x(x+y) \implies (\frac{x}{y})^۲ + \frac{x}{y} - ۱ = ۰$$
$$\implies \frac{x}{y} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

که چون x و y مثبت هستند، علامت منفی قابل قبول نیست. پس $\frac{x}{y} = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$. پس

$$\frac{z}{y} = \frac{y}{x} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\implies \frac{۱۰۰}{y} = \frac{x}{y} + ۱ + \frac{z}{y} = \sqrt{۵} + ۱ \implies y = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۵}+۱} = ۲۵(\sqrt{۵} - ۱)$$
$$\implies x = \frac{۲۵(\sqrt{۵}-۱)^۲}{۲} = ۲۵(۳ - \sqrt{۵})$$

پس جواب برابر است با $۲۵(۳ - \sqrt{۵})$ که در گزینه‌ها نیست.

۲۹. اگر a و b به ترتیب طول و عرض مستطیل اصلی باشند، طول مستطیل‌های کوچک برابر $\frac{b}{۲}$ و عرض آن‌ها برابر $\frac{a}{۱۸}$ است. پس باید

$$\frac{\frac{a}{۱۸}}{\frac{b}{۲}} = \frac{b}{a} \implies (\frac{a}{b})^۲ = ۹ \implies \frac{a}{b} = ۳$$

پس گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۳۰.

$$\sin(۲\alpha) = ۲\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{۱}{۲}$$

پس ۲α باید برابر با یکی از زاویه‌های ۳۰^o یا ۱۵۰^o باشد، یعنی $\alpha = ۱۵^o$ یا $\alpha = ۷۵^o$ که در هر دو حالت، $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$ نمی‌توانند اضلاع یک مثلث باشند. پس سوال غلط است.

۳۱. جواب ناحیه‌ی $x + y < ۰$ است. یعنی زیر خط $x + y = ۰$ که گزینه‌ی ۴ است.

۳۲. عرض از مبدأ این خط برابر است با $-L\sin\alpha$ و شیب آن برابر است با $\tan\alpha$ پس معادله‌ی خط عبارت است از

$$y = -L\sin\alpha + \tan\alpha x$$

که در گزینه‌ها نیست.

۳۳. داریم

$$۰ < \sin x < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس عبارت برابر است با

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sin x - (۱ - \sin x) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱$$

پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۳۴. بنابر اتحاد زیر

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = (a+b+c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - ac - bc)$$

اگر قرار دهیم $a = \sqrt[۳]{x}$، $b = \sqrt[۳]{y}$ و $c = \sqrt[۳]{z}$ به دست می‌آوریم،

$$x + y + z - ۳\sqrt[۳]{xyz} = ۰ \implies ۳\sqrt[۳]{xyz} = ۶$$

که نتیجه می‌دهد $xyz = ۸$ پس گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۳۵. با برابر قرار دادن ضرایب $x^۲$ و xy و $y^۲$ در دو طرف به دست می‌آوریم،

$$a^۲ + b^۲ = ۶۵$$

$$-۲a + ۲bc = ۲۰$$

$$۱ + c^۲ = ۵$$

که از حل آن‌ها و با توجه به شرط $b < c < ۰$ به دست می‌آید

$$c = -۲, \quad b = -۷, \quad a = ۴$$

پس گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۳۶. اگر زاویه‌ی $\angle xoy$ را نسبت به نقطه‌ی A قرینه کنیم، زاویه‌ی دیگری به دست می‌آید که با زاویه‌ی $\angle xoy$ یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهد و قطر این متوازی‌الاضلاع، تنها جواب مسأله است. پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۳۷. همه‌ی موارد صحیح‌اند. بنابراین گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۳۸. مثلث BCD با مثلث ABC متشابه است بنابراین متساوی‌الساقین است پس

$$BD = BC = ۲\sin(۱۸^o) = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$$

پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۳۹. داریم $\angle A = ۷۰^o$ پس $\angle B + \angle C = ۱۱۰^o$ پس حداقل یکی از $\angle B$ و $\angle C$ از ۵۰^o بیشتر است. اگر $\angle B > ۵۰^o$ آن‌گاه $\angle B > \beta$ و در نتیجه در مثلث ABM، $AM > BM$ و اگر $\angle C > ۵۰^o$ آن‌گاه $\angle C > \beta$ و در نتیجه در مثلث ABM، $AM > CM = BM$. پس در هر دو صورت گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۴۰. مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و مراکز سه دایره‌ی محاطی خارجی که در مجموع چهار نقطه هستند جواب مسأله است. پس گزینه‌ی ۴ صحیح است.